Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

Укладач: ( ) Н. С. Грудкіна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Варіаційне числення»

для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»

Рекомендовано:
Вченою Радою факультету машинобудування
Протокол № 01-23/08 від «28» серпня 2023 р.

2023-2024 навчальний рік

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

Укладач: ( ) Н. С. Грудкіна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Варіаційне числення»

для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
на засіданні методичної ради
Протокол №8 від 20.05.21

Краматорськ 2021

УДК 519.3
Г 37

Рецензент: Чумак О.О., канд. пед. наук, доцент кафедри Донбаської національної академії будівництва і архітектури, м. Краматорськ

Грудкіна Н.С.

Г 37 Варіаційне числення: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи дисципліни / Н.С. Грудкіна. – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 28 с.

Посібник з курсу «Варіаційне числення» містить стислий теоретичний матеріал та супроводжується прикладами розв’язання типових завдань, містить завдання для самостійного виконання студентами. Може використовуватись як викладачами, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 519.3

ЗМІСТ

ВСТУП 4
РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛУ, ВАРІАЦІЇ ТА ЕКСТРЕМУМУ 5
1.1 Стислі теоретичні відомості 5
1.1.1 Поняття про функціонал та екстремум функціоналу 5
1.1.2 Класичні задачі варіаційного числення 7
1.1.3 Варіація функції та неперервність функціоналу. Лінійний функціонал, варіації функціоналу 9
1.2 Приклади розв’язання задач 12
1.3 Завдання для самостійного опрацювання 15
РОЗДІЛ 2. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ 17
2.1 Стислі теоретичні відомості 17
2.1.1 Необхідна умова екстремуму функціоналу 17
2.1.2 Диференціальне рівняння екстремалей 17
2.1.3 Достатні умови екстремуму 18
2.2 Приклади розв’язання задач 19
2.3 Завдання для самостійного опрацювання 26
ЛІТЕРАТУРА 28

ВСТУП

Курс «Варіаційне числення» повинен забезпечити формування досягнення студентами високого рівня математичної підготовки з розв’язування оптимізаційних задач, що зводяться до дослідження на екстремум функцій та функціоналів, що широко застосовуються у різних областях науково-природничих досліджень. Цей курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами математичного моделювання та методами вирішення різних класів задач з дослідження на екстремум функцій та функціоналів за наявності обмежень та без них. У подальшому отримані знання знаходять численні застосування як в інших спеціальних розділах математики, так і в наукових дослідженнях з різних областей та напрямків.

Методичні вказівки мають за основну мету за курсом «Варіаційне числення» опанування студентами основних методів розв’язання оптимізаційних задач, в тому числі із застосуванням прикладних пакетів програм. Посібник містить стислі теоретичні відомості та завдання до самостійного опрацювання за матеріалом курсу. Отримані навички від самостійної роботи стануть фундаментом застосування відповідних методів досліджень та аналізу отриманих результатів в практичній роботі.

Сподіваємось, що даний сібник допоможе студентам в оволодінні методами вивчення геометричних об’єктів, основними математичними підходами до розв’язку прикладних задач із використанням сучасних важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛУ, ВАРІАЦІЇ ТА ЕКСТРЕМУМУ

1.1 Стислі теоретичні відомості

1.1.1 Поняття про функціонал та екстремум функціоналу

Означення 1. Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I, то цю змінну I називають функціоналом від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначають $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називають областю визначення функціоналу. При цьому функція $y(x)$ є незалежною змінною функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу I називають функціями порівняння або допустимими функціями. Кожну функцію $y(x)$, яка належить D функціоналу $I[y]$, розглядають як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються функціональними просторами. Таким чином, функціонал — це функція, в якої значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки (елементи) функціонального простору, а значеннями залежної змінної I — числа.

Розглядають також функціонали від декількох незалежних функціональних змінних.

Означення 2. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ з певного класу функцій D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називають функціоналом від n функціональних змінних і позначають відповідно у вигляді $I = I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = I[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$.

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал вигляду $I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$, областю визначення якого служить клас функцій $C_1[a,b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a,b]$.

Означення 3. Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_0 = \rho_0(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|. \qquad (1)$$

При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Означення 4. Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'_1(x) - y'_2(x)|. \qquad (2)$$

При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

Означення 5. Нехай D_1 — деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 абсолютний мінімум (максимум), який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується рівність:

$$I[y(x)] \ge I[\overline{y}(x)] \quad \left(I[y(x)] \le I[\overline{y}(x)]\right)... \qquad (3)$$

Означення 6. Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 локальний або відносний мінімум (максимум), який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується рівність:

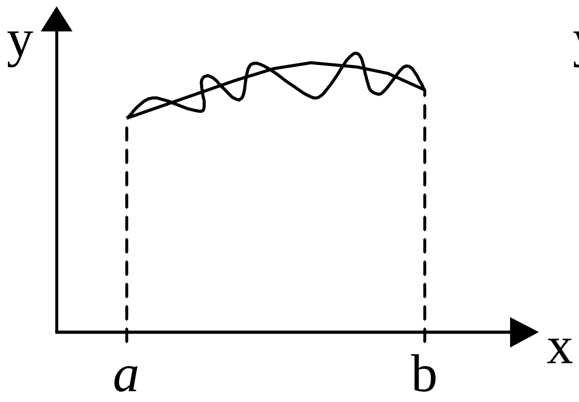
$$I[y(x)] \ge I[y_0(x)] \quad (I[y(x)] \le I[y_0(x)]). \qquad (4)$$

Зауваження 1. Максимуми і мінімуми називають екстремумами.

Зауваження 2. Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається сильним.

Зауваження 3. Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається слабким.

Наведемо геометричну інтерпретацію наближення ліній у розумінні відстані нульового порядку (рис. 1, координати ліній близькі, а напрямки дотичних суттєво відрізняються) та відстані першого порядку (рис. 2, близькі не тільки координати двох ліній, а і напрямки дотичних).



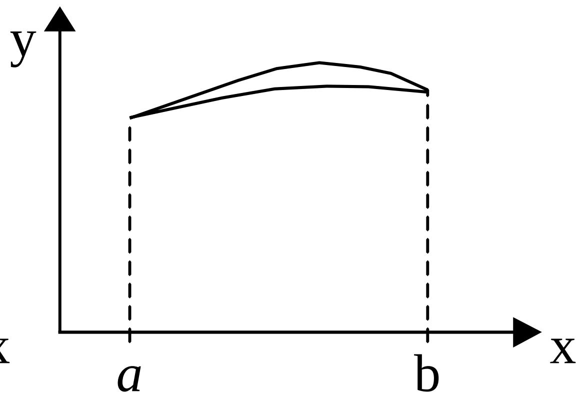


Рис.1 Рис.2

Маємо наступні висновки.

Зауваження 4. Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Зауваження 5. Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

При наступних дослідженнях розглядаємо слабкий відносний екстремум.

Таким чином, основна задача варіаційного числення полягає у дослідженні функціоналу на екстремум.

1.1.2 Класичні задачі варіаційного числення

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону). Знайти криву, розміщену у вертикальній площині, що з'єднує дві задані точки $A(a;y_a)$ і $B(b;y_b)$, що не належать одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис. 3).

Аналітичне формулювання задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \qquad (5)$$

за крайових умовах $y(a) = y_a$; $y(b) = y_b$.

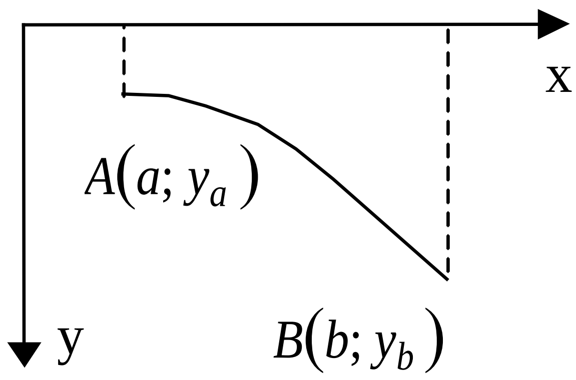


Рис. 3.

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ задано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Серед всіх ліній, які належать даній поверхні і з'єднують точки *A* і *B*, обрати ту, дуга *AB* якої має найменшу довжину.

Аналітичне формулювання задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0$ і доставляють мінімум функціоналу

$$I[y, y, z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \tag{6}$$

за крайових умовах

$$x(t_1) = x_1;\ y(t_1) = y_1;\ z(t_1) = z_1;$$
$$x(t_2) = x_2;\ y(t_2) = y_2;\ z(t_2) = z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідо). Нехай на осі Ox задано дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$. Серед всіх ліній заданої довжини l, які з'єднують на площині Oxy ці точки A і B, вибрати таку, що разом з відрізком *AB* обмежує найбільшу площу (рис.4).

Аналітичне формулювання задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l \tag{7}$$

і доставляє максимум функціоналу $I[y] = \int_a^b y(x)dx$ при крайових умовах $y(a) = 0$; $y(b) = 0$.

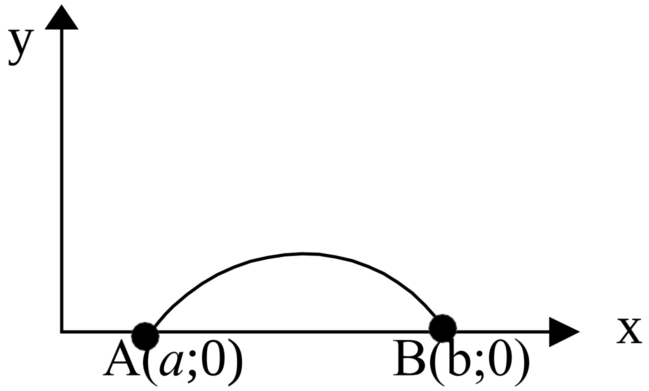


Рис. 4.

1.1.3 Варіація функції та неперервність функціоналу. Лінійний функціонал, варіації функціоналу

Означення 7. Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій *D*, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ — довільні функції даного класу *D*. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається приростом або варіацією аргументу y функціоналу $I[y]$ і позначається δy у вигляді $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$. Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається приростом функціоналу $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зауваження 6. Похідна варіації функції дорівнює варіації похідної:

$$(\delta y)' = \delta y'.$$

Дійсно, маємо:

$$(\delta y)' = \left(\overline{y}(x) - y(x)\right)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'.$$

Означення 8. Функціонал $I[y]$ називається неперервним на кривій $y = y(x)$ в розумінні відстані *k*–того порядку, якщо за довільно заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виконанні умови $\rho_k(y, y_0) < \delta$ справджується нерівність $|\Delta I| = |I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$.

Означення 9. Функціонал $I[y]$ називається лінійним, якщо виконуються умови:

1) функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів, тобто $I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2]$;

2) сталий множник можна виносити за знак функціоналу, тобто $I[cy] = cI[y]$.

Означення 10 (перше означення варіації функціоналу). Якщо для довільно малої варіації аргументу δy приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини, лінійної відносно δy, та нескінченно малої вищого порядку порівняно з δy:

$$\Delta I = L[y, \Delta y] + \beta[y, \Delta y],$$

де $L[y, \Delta y]$ — лінійний відносно δy функціонал,

$\beta[y, \Delta y]$ — нескінченно малий вищого порядку порівняно з δy функціонал $\beta[y, \Delta y] = o(\delta y)$,

тобто

$$\beta[y, \delta y] = \gamma[y, \delta y] \cdot \max|\delta y|,$$

де $\lim\limits_{\max|\delta y| \to 0} \gamma[y, \delta y] = 0,$

то сам функціонал $I[y]$ називається варійовним, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y, \Delta y]$ називається диференціалом або варіацією функціоналу і позначається δI:

$$\delta I = L[y, \delta y], \quad \Delta I = \delta I + \beta[y, \delta y],$$

де $\beta[y, \delta y] = o(\delta y)$.

При дослідженні функціоналів варіація функціоналу відіграє роль, аналогічну тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. наведемо відповідність понять диференціального та варіаційного числень (табл. 1).

Зауваження 7. Варіацію δI називають також варіацією першого порядку або першою варіацією функціоналу $I[y]$.

Таблиця 1. Відповідність понять диференціального та варіаційного числень

Диференціальне числення	Варіаційне числення
Аргумент — числова змінна x	Аргумент — числова функція $y(x)$
Залежна змінна — числова y	Залежна змінна — числова I
Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
Необхідна умова екстремуму: $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму: $\delta I = 0$
Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0 - \min$, $d^2 y < 0 - \max$	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0 - \min$, $\delta^2 I < 0 - \max$

Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції. Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою функцією.

Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha\delta y$, де α — деяке число. Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї функцій є функцією параметра α: $I[y + \alpha\delta y] = \Phi(\alpha)$.

Розкладемо цю функцію за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha = 0$:

$$I[y+\alpha\delta y] = I[y] + \left\{\frac{d}{d\alpha} I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot\alpha + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2} I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot\alpha^2 + R_2(y,\delta y,\alpha), \quad (8)$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha) = o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Означення 10 (друге означення варіації функціоналу). Варіацією або першою варіацією функціоналу δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta I = \delta I[y, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} I[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}. \tag{9}$$

Другою варіацією функціоналу або варіацією другого порядку $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta^2 I = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}. \tag{10}$$

На практиці зручніше користуватись означеннями (9) та (10).

1.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити функціонал при заданих значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(4)$ при $y_1 = \sqrt{x+5}$ та $y_2 = \cos\frac{3\pi x}{4}$.

Розв'язання:

$I[y_1] = \sqrt{4+5} = 3;$

$I[y_2] = \cos\frac{12\pi}{4} = \cos 3\pi = -1.$

Відповідь: $I[y_1] = 3,\ I[y_2] = -1.$

б) $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} y$ при $y = arctg(x+2)$.

Розв'язання:

$I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} arctg(x+2) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $I[y] = \frac{\pi}{2}$.

в) $I[y] = y'(0)$ при $y_1 = 5tg^2 x^3$.

Розв'язання:

$$I[y_1] = \left(5tg^2 x^3\right)'\Big|_{x=0} = 10tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

Відповідь: $I[y_1] = 0$.

г) $I[y_1] = \int_0^1 y^2(x)dx$ при $y_1 = \sin 3\pi x$.

Розв'язання:

$$I[y_1] = \int_0^1 \sin^2 3\pi x dx = \int_0^1 \frac{1-\cos 6\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 6\pi x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x\Big|_0^1 - \frac{1}{13\pi} \sin 6\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $I[y_1] = \frac{1}{2}$.

д) $I[y_1, z_1] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^3 z dx$ при $y_1 = \cos x$ та $z_1 = \sin^2 x$.

Розв'язання:

$$I[y_1, z_1] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin x = u;\ du = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - u^2 \\ u_H = \sin 0 = 0;\ u_B = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Відповідь: $I[y, z] = \frac{2}{15}$.

Приклад 2. Знайти відстань першого порядку між кривими $y_1(x)=x^2$ і $y_2(x)=x$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання:

$$\rho_1=\max_{0\le x\le 1}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|+\max_{0\le x\le 1}\left|y'_1(x)-y'_2(x)\right|.$$

Розглянемо $z_0(x)=y_1(x)-y_2(x)=x^2-x$ і $z_1(x)=y'_1(x)-y'_2(x)=2x-1.$

Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;1]$:

$$z'_0(x)=2x-1;\; z'_0(x)=0;\; x_1=\frac{1}{2};$$

$$z_0(0)=0;\; z_0\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4};\; z_0(1)=0;$$

$$\max_{0\le x\le 1} z_0(x)=0;\quad \min_{0\le x\le 1} z_0(x)=-\frac{1}{4};$$

$$z_1(0)=-1;\; z_1(1)=1;$$

$$\max_{0\le x\le 1} z_1(x)=1;\quad \min_{0\le x\le 1} z_1(x)=-1.$$

Тоді маємо:

$$\max_{0\le x\le 1}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|=\max_{0\le x\le 1}\left|z_0(x)\right|=0;$$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|y'_1(x)-y'_2(x)\right|=\max_{0\le x\le 1}\left|z_1(x)\right|=1;$$

$$\rho_1=0+1=1.$$

Відповідь: $\rho_1=0+1=1.$

Приклад 3. Знайти варіацію функціоналу $I[y]=\int_a^b y(y+2\sin x)dx$, користуючись першим означенням як головної лінійної відносно δy частини приросту ΔI.

Розв'язання:

Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I = \int_a^b (y+\delta y)(y+\delta y+2\sin x)dx - \int_a^b y(y+2\sin x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(y^2 + y\delta y + 2y\sin x + y\delta y + (\delta y)^2 + 2\sin x\cdot\delta y\right)dx -$$

$$- \int_a^b y(y+2\sin x)dx = \int_a^b \left(y^2 + 2y\delta y + 2y\sin x + (\delta y)^2 + 2\sin x\cdot\delta y - - y^2 - 2y\sin x\right)dx =$$

$$\int_a^b \left(2y\delta y + (\delta y)^2 + 2\sin x\cdot\delta y\right)dx = 2\int_a^b (y+\sin x)\delta y dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx.$$

Відповідь: за першим означенням $\delta I = 2\int_a^b (y+\sin x)\delta y dx$.

Приклад 4. Знайти варіацію функціоналу $I[y] = \int_a^b x\sqrt{y}dx$, користуючись другим означенням варіації функціоналу як похідної по параметру.

Розв'язання:

Згідно другого означення варіації функціоналу маємо:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\sqrt{y+\alpha\delta y}dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(x\sqrt{y+\alpha\delta y}\right)'_\alpha dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+\alpha\delta y}}\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha dx\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y+\alpha\delta y}}dx\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y}}dx.$$

Відповідь: за другим означенням $\delta I = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y}}dx.$

1.3 Завдання для самостійного опрацювання

1. Обчислити заданий функціонал при заданих значеннях аргументу.

1.1. $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} y$ при $y = \dfrac{3x^3+5x+100}{7-6x^3}$.

1.2. $I[y] = \int_0^2 y^2(x)dx;\ y_1 = \cos\pi x;\ y_2 = \ln x.$

1.3. $I[y]=\int_0^1 (2y-3xy')dx;\ y_1=\sin 2\pi x;\ y_2=arctgx.$

1.4. $I[y]=y'(3)$ при $y_1=(5x+3)e^{3-x}$.

2. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

2.1. $y=y_1(x)=\sin 3x;\ y=y_2(x)=\sin x;\ \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

2.2. $y=y_1(x)=xe^{-x};\ y=y_2(x)=0;\ [0;1].$

2.3. $y=y_1(x)=\sqrt{x};\ y=y_2(x)=\sqrt{x}\ln x;\ \left[e^{-3};1\right]$

2.4. $y=y_1(x)=tg2x;\ y=y_2(x)=\sin x;\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

3. Знайти відстань першого порядку між заданими лініями на вказаних відрізках.

3.1. $y=y_1(x)=x^2;\ y=y_2(x)=\ln x;\ [1;e].$

3.2. $y=y_1(x)=2arctgx;\ y=y_2(x)=x;\ \left[0;\sqrt{3}\right].$

3.3. $y=y_1(x)=x;\ y=y_2(x)=\ln x;\ \left[e^{-1};e\right]$

3.4. $y=y_1(x)=\sqrt{x};\ y=y_2(x)=\ln x;\ \left[1;e^2\right]$

4. Знайти варіацію δI для заданого функціоналу.

4.1. $I[y]=\int_0^{1/2} y'\cdot arctg2ydx.$

4.2. $I[y]=\int_0^3 y(y+3x)dx.$

4.3. $I[y]=\int_1^e y\ln(x+y')dx.$

4.4. $I[y]=\int_0^1 \left(xy+(y')^2\right)dx.$

РОЗДІЛ 2. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ

2.1 Стислі теоретичні відомості

2.1.1 Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціоналу справедлива наступна теорема.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму в варіаційній формі). Якщо функціонал $I[y]$ має варіацію δI і досягає на деякій функції $y_0 = y_0(x)$ екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю: $\delta I[y_0, \delta y] = 0.$

Доведення:

Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0 + \alpha\delta y$, де α — деяке число. На вказаній сім'ї функцій функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0, \delta y] = \Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при $\alpha=0$.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\left.\dfrac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, тобто $\left.\dfrac{d}{d\alpha} I[y_0 + \alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} = 0$. Згідно з другим означенням вказана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0, \delta y]$.

Отже, $\delta I[y_0, \delta y] = 0.$

Означення 11. Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються стаціонарними функціями або допустимими екстремалями.

2.1.2 Диференціальне рівняння екстремалей

Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями (варіаційна задача з закріпленими кінцями). Знайти мінімум (максимум) функціоналу $I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ при крайових умовах $y(x_1) = y_1;\ \ y(x_2) = y_2$ серед неперервно диференційованих на відрізку $[x_1; x_2]$ функцій $y = y(x)y,$ де x_1, x_2, y_1, y_2 — відомі числа. Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то поставлена задача називається варіаційною задачею з закріпленими кінцями.

Теорема 2. Допустимі екстремалі функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ з закріпленими кінцями $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$, визначаються як розв'язки диференціального рівняння $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ при крайових умовах $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$.

Означення 12. Диференціальне рівняння другого порядку $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ називається рівнянням Ейлера. Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями, а саме рівняння Ейлера — диференціальним рівнянням екстремалей.

Таким чином, допустимі екстремалі виділяються зі всіх екстремалей із урахуванням крайових умов.

2.1.3 Достатні умови екстремуму

В багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту задачі. Якщо допустима екстремаль єдина, то вона і буде розв'язком варіаційної задачі. В загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в розглядуваному класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0,\delta y]=0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I\geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I\leq 0$, то — максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0,\delta y]=0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δI визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Теорема 3 (достатня умова екстремуму у варіаційній формі). Якщо на розглядуваному класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ додатня $\delta^2 I>0$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ від'ємна $\delta^2 I<0$, то — максимум, якщо ж друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.

При певних умовах знак другої варіації $\delta^2 I$ функціоналу $I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ визначається знаком другої похідної $F''_{y'y'}$. Звідси випливають достатні умови Лежандра:

1. Посилені достатні умови Лежандра: якщо на допустимій екстремалі $y_0(x)$ виконується нерівність $F''_{y'y'} > 0$, то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність $F''_{y'y'} < 0$, то — слабкий максимум.

2. Якщо в точках $(x; y)$, які близькі до допустимої екстремалі $y_0(x)$, виконується нерівність $F''_{y'y'} \geq 0$ $\left(F''_{y'y'} \leq 0\right)$ при довільних значеннях y', то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).

2.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 5. Знайти екстремалі функціоналу:

а) $I[y] = \int\limits_0^1 \left(2y - 2xy' - (y')^2\right)dx$.

Розв'язання:

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 2y - 2xy' - (y')^2; \quad F'_y = 2; \quad F'_{y'} = -2x - 2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}(-2x - 2y') = -2 - 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$2-(-2-2y'')=0;$$

або

$$y''+2=0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = \int(-2)dx = -2x + C_1; \quad y = \int(-2x + C_1)dx = -x^2 + C_1 x + C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції:

$$y = -x^2 + C_1 x + C_2,$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Відповідь: $y = -x^2 + C_1 x + C_2$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Приклад 6. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9y^2 - (y')^2\right) dx;\ y(0) = 2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Розв'язання:

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$F(x, y, y') = 9y^2 - (y')^2;\ F'_y = 18y;\ F'_{y'} = -2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = -2y''.$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$18y\text{-}(\text{-}2y'')=0; \qquad y''+9y=0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^2+9=0; \qquad k_{1,2}=\pm 3i.$$

Екстремалями служать функції

$$y=C_1\cos 0+C_2\sin 0,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо значення C_1 і C_2 згідно крайових умов:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 2; \\ C_1\cos\frac{3\pi}{2} + C_2\sin\frac{3\pi}{2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 2; \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отже, допустима екстремаль $y=2\cos 3x$.

Відповідь: $y=2\cos 3x$.

б) $I[y]=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0.$

Розв'язання:

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x};\quad F'_y=0;$$

$$F'_{y'}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}2y'=\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}};\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0.$$

Звідси

$$y'=\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}};$$

Отже отримаємо:

$$y=\int\frac{C_1xdx}{\sqrt{1-C_1^2x^2}}=\left|\begin{matrix}u=1-C_1^2x^2;\\ du=-2C_1^2xdx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2C_1}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{C_1}\sqrt{u}+C_2=-\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2}+C_2.$$

Отже, маємо:

$$y=-\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2}+C_2$$

або в неявній формі рівняння екстремалей

$$x^2+(y-C_2)^2=\frac{1}{C_1^2}.$$

Екстремалями служить сім'я кіл, використовуючи крайові умови, знаходимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0^2 + (1-C_2)^2 = \dfrac{1}{C_1^2}; \\ 1^2 + (0-C_2)^2 = \dfrac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2C_2 + C_2^2 = \dfrac{1}{C_1^2}; \\ 1 + C_2^2 = \dfrac{1}{C_1^2}; \end{cases}$$

$$-2C_2 = 0; \quad C_2 = 0; \quad \frac{1}{C_1^2} = 1; \quad C_2 = 1.$$

Тоді $x^2+y^2=1$ —допустима екстремаль.

Відповідь: $x^2+y^2=1$.

Приклад 7. Визначити форму твердого тіла, що рухається в потоці газу з найменшим опором. Вважати шукане тіло тілом обертання.

Розв'язання:

З фізичних міркувань випливає, що задача зводиться до мінімізації сили опору

$$I[y] = 4\pi\rho v^2 \int_0^l (y')^3\, y dx$$

при крайових умовах $y(0)=0$; $y(l)=R$,

де ρ — густина газу, v —швидкість газу відносно тіла.

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = (y')^3 y; \quad F'_y = (y')^3; \quad F'_{y'} = y \cdot 3(y')^2 = 3y(y')^2;$$

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} = \frac{d}{dx}\left(3y(y')^2\right) = 3\left(y' \cdot (y')^2 + y \cdot 2y' \cdot y''\right) = 3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$(y')^3 - \left(3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''\right) = 0;$$

$$3y \cdot y' \cdot y'' + (y')^3 = 0.$$

Маємо $y \neq const$, тоді $y' \neq 0$. Останнє рівняння спрощується:

$$3yy'' + (y')^2 = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = p, \quad p = p(y); \quad y'' = p' \cdot p; \quad p' = \frac{dp}{dy};$$

$$3y \cdot p' \cdot p + p^2 = 0 \quad \Big| \; : p = y' \neq 0; \quad 3y \cdot p' + p = 0;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln|C_1|;$$

$$p = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$\int y^{\frac{1}{3}}dy = C_1\int dx; \quad \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

Тоді $y = \left(\frac{4(C_1 x + C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ — екстремалі, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} \left(\frac{4(C_1 \cdot 0 + C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = 0; & C_2 = 0; \\ \left(\frac{4(C_1 \cdot l + C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = R; & \frac{3}{4}C_1 l = R^{\frac{4}{3}}; \quad C_1 = \frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}. \end{cases}$$

Тоді $y = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}x\right)^{\frac{3}{4}} = R\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки допустима екстремаль єдина і з фізичних міркувань випливає, що поставлена задача має розв'язок, то функція $y = R\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$ визначає форму тіла обертання з найменшим опором.

Відповідь: $y = R\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Приклад 8. Користуючись посиленими достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y] = \int_0^1 e^x\left(2y^2 + (y')^2\right)dx; \; y(0) = 1; \; y(1) = e.$

Розв'язання:

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=e^x\left(2y^2+(y')^2\right);\ F'_y=4e^x y;\ F'_{y'}=2e^x y';$$
$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=2\left(e^x y'+e^x y''\right)=2e^x(y'+y'').$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$4e^x y-2e^x(y'+y'')=0;\ y''+y'-2=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$k^2+k-2=0;\ k_1=1;\ k_2=-2;\ y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ — екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; \\ e=C_1e+C_2e^{-2};\end{cases}\quad \begin{matrix}C_1=1; \\ C_2=0.\end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $y=e^x$.

Оскільки на допустимій екстремалі $F''_{y'y'}=2e^x>0$, при $x\in[0;1]$, то функціонал має мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=e^x;\ F(x,y,y')=e^x\left(2\cdot e^{2x}+e^{2x}\right)=3e^{3x};$$
$$I_{\min}=I\left[e^x\right]=\int_0^1 3e^{3x}dx=e^{3x}\Big|_0^1=e^3-1.$$

Відповідь: $I_{\min}=I\left[e^x\right]=\int_0^1 3e^{3x}dx=e^{3x}\Big|_0^1=e^3-1.$

б) $I[y]=\int_0^e \frac{e^{-y}}{y'}dx;\ y(0)=1;\ y(e)=1+\ln 2.$

Розв’язання:

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_{y}=-\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_{y'}=-\frac{e^{-y}}{(y')^2};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=-e^{-y}(-1)\cdot y'\cdot\frac{1}{(y')^2}-e^{-y}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(y')^3}\cdot y''=\frac{e^{-y}}{y'}+\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}=0;\quad y''+(y')^2=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y'=p;\ p=p(y);\ y''=p'p;\ p'\cdot p+p^2=0;\ p'=-p;\ \int\frac{dp}{p}=-\int dy;$$

$$\ln|p|=-y+\ln C_1;\ p=C_1e^{-y};\ y'=C_1e^{-y};\ \int e^{y}dy=C_1\int dx;$$

Звідси $e^{y}=C_1x+C_2;\ y=\ln(C_1x+C_2)$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}1=\ln C_2;\\ 1+\ln 2=\ln(C_1e+C_2);\end{cases}\quad C_2=e;\ C_1=1.$$

Отже, допустима екстремаль $y=\ln(x+e)$.

Скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра:

$$F''_{y'y'}=2e^{-y}\cdot(y')^{-3}.$$

На допустимій екстремалі $y=\ln(x+e)$ маємо:

$$y'=\frac{1}{x+e};\ F''_{y'y'}=2e^{-\ln(x+e)}\cdot\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-3}=2(x+e)^2>0\ \text{при}\ x\in[0;e].$$

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F(x,y,y')=e^{-y}\cdot(y')^{-1}=e^{-\ln(x+e)}\cdot\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-1}=1;$$

$$I_{\min}=I[\ln(x+e)]=\int_0^e 1dx=e.$$

Відповідь: $I_{\min}=I[\ln(x+e)]=\int_0^e 1dx=e$.

2.3 Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі):

1.1. $I[y]=\int\limits_{-1}^{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;\ y(-1)=1;\ y(2)=4.$

1.2. $I[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(12xy-(y')^2\right)dx;\ y(-1)=1;\ y(0)=0.$

1.3. $I[y]=\int\limits_{1}^{2}\left((y')^2+2yy'+y^2\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=0.$

1.4. $I[y]=\int\limits_{1}^{e}\left(x(y')^2+yy'\right)dx;\ y(1)=0;\ y(e)=1.$

1.5. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}e^{y}(1+xy')dx;\ y(0)=0;\ y(1)=0.$

1.6. $I[y]=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx;\ y(0)=0;\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}.$

1.7. $I[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8.$

1.8. $I[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(xy'+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(2)=0.$

1.9. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=2.$

1.10. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(y')^2};\ y(0)=0;\ y(1)=1.$

2. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

2.1. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}\left((y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;\quad y(1)=sh1;\ y'(1)=ch1.$

2.2. $I[y]=\int\limits_0^1\left(360x^2y-(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;\quad y(1)=0;\ y'(1)=\frac{5}{2}.$

3. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

3.1. $I[y,z]=\int\limits_1^2\left((z')^2-xy'z\right)dx;$

$y(1)=1;\quad z(1)=1;\quad y(2)=-\frac{1}{6};\quad z(2)=\frac{1}{2}.$

3.2. $I[y,z]=\int\limits_1^2\left((y')^2+z^2+(z')^2\right)dx;$

$y(1)=1;\quad z(1)=0;\quad y(2)=2;\quad z(2)=1.$

3.3. $I[y,z]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left((y')^2-2xyz'\right)dx;$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=2;\quad z\left(\frac{1}{2}\right)=15;\quad y(1)=1;\quad z(1)=1.$

3.4. $I[y,z]=\int\limits_{-1}^1\left(2xy-(y')^2+\frac{(z')^2}{3}\right)dx;$

$y(-1)=2;\quad z(-1)=-1;\quad y(1)=0;\quad z(1)=1.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник.— К.: Знання, 2008.— 368 с.

2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. —К.: Либідь, 1996. — 440 с.

3. Высшая математика: Сборник задач /Х.И.Гаврильченко, А.Ф.Кривой, П.С.Кропивянский и др. — К.: Вища шк., 1991. — 455 с.

Навчальне видання

ГРУДКІНА Наталія Сергіївна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни
«Варіаційне числення»
для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»

Редагування, комп’ютерне верстання І. І. Дьякова

160/2019. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 1,27.
Обл.-вид. арк. 0,92. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003